

# 國立彰化師範大學103學年度碩士班招生考試試題

系所： 數學系

組別： 甲組

科目： 機率與統計

☆☆請在答案紙上作答☆☆

共 1 頁，第 1 頁

1. 從(0,1)的實數區間中隨機取出兩數  $x, y$ ，設  $z$  代表最接近  $\frac{x}{y}$  的整數，則  $z$  為不大於 100 的偶數的機率為何？ (10%)
2. (a) 請敘述 Chebyshev 不等式。 (5%)  
(b) 我們想做國光石化是否可以在彰化設廠的民意調查，假設真正的支持度為  $p$ ，則在信賴水平要求為 95%，調查誤差須控制在 0.05 以內的情況下，利用 Chebyshev 不等式求所需樣本大小。 (10%)
3. (a) 設  $X_n, n=1, 2, \dots$ ，為 i.i.d.,  $EX_1 = \mu, \text{var}(X_1) = 1$ 。則根據甚麼定理，我們可以證明  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)$  的分佈會收斂至標準常態分佈？ (3%)  
(b) 請證明(a)。 (12%)
4. (a) 設  $X \geq 0$ ，求證  $EX^r = r \int_0^{\infty} t^{r-1} P(X > t) dt$ ，其中  $r \geq 1$ 。 (5%)  
(b) 當  $t \rightarrow \infty$ ， $P(|X| > t) \approx t^{-\alpha}, \alpha > 1$ 。求證  $E|X| < \infty$ 。 (5%)
5. 設  $X_1, \dots, X_n$  為 i.i.d. 隨機變數且服從常態分佈  $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  與  $\sigma$  均未知。  
(a) 試求  $\mu$  與  $\sigma^2$  的最大概似估計量。 (8%)  
(b) 根據(a)的結果，找  $\sigma$  的不偏估計量。 (5%)  
(c) 若  $\sigma = 1$  已知，試求  $\mu^2$  的均勻最小變異數不偏估計量(UMVUE)。 (7%)
6. 令  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right); x > 0$  且  $\theta > 0$ 。  
(a) 請建構  $\theta$  的  $1-\alpha$  水準之信賴區間。 (10%)  
(b) 請「解釋」上述(a)中所得之信賴區間包含參數  $\theta$  的機率是否為  $1-\alpha$ 。 (5%)
7. 假設  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); -\infty < x < \infty$ ， $\sigma > 0$  且令  $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 。  
(a) 試證機率密度函數族  $\{f(x; \sigma) : \sigma > 0\}$  對  $T(\mathbf{X})$  具有單調概似比(MLR)性質。 (5%)  
(b) 若想檢定  $H_0 : \sigma^2 = 1$  v.s.  $H_1 : \sigma^2 > 1$ ，試求  $\alpha$  水準下的均勻最強力(UMP)檢定。 (10%)